حل برخی تمرین‌های سری اول فرآیندهای تصادفی

-۱

$$E\{Y \mid X \le 0\} = \frac{1}{\Pr(X \le 0)} \int_{x=-\infty}^{0} \int_{y=-\infty}^{\infty} y f_{XY}(x,y)\,dy\,dx$$

$$= \frac{1}{F_X(0)} \int_{x=-\infty}^{0} f_X(x) \left(\int_{y=-\infty}^{\infty} y f_Y(y \mid x)\,dy \right) dx = \frac{1}{F_X(0)} \int_{x=-\infty}^{0} f_X(x) E\{Y \mid X = x\}\,dx$$

-۲

$$\boxed{F_X(x \mid a < X \le b) = \frac{\Pr(X \le x,\ a < X \le b)}{\Pr(a < X \le b)} = \begin{cases} 0 & x \le a \\ \dfrac{\Pr(a < X \le x)}{\Pr(a < X \le b)} = \dfrac{F_X(x) - F_X(a)}{F_X(b) - F_X(a)} & a \le x \le b \\ 1 & b \le x \end{cases}}$$

$$\boxed{f_X(x \mid a < x \le b) = \begin{cases} \dfrac{f_X(x)}{\Pr(a < x \le b)} = \dfrac{f_X(x)}{F_X(b) - F_X(a)} & a \le x \le b \\ 0 & Otherwise \end{cases}}$$

۳- اگر متغیر تصادفی R فاصلهٔ نقطهٔ انتخاب شده تا مرکز دایره باشد، خواهیم داشت:

$$F_R(r) = \Pr\{R \le r\} = \begin{cases} 0 & r \le 0 \\ \dfrac{pr^2}{pa^2} = \dfrac{r^2}{a^2} & 0 \le r \le a \\ 1 & r \ge a \end{cases}$$

طول وتر گذرنده از نقطه‌ای به فاصلهٔ R از مرکز دایره برابر است با: $D = 2\sqrt{a^2 - R^2}$

$$\rightarrow\ F_D(d) = \Pr\{D \le d\} = \Pr\{2\sqrt{a^2 - R^2} \le d\} = \Pr\{\sqrt{a^2 - (\frac{d}{2})^2} \le R\} = 1 - F_R(\sqrt{a^2 - (\frac{d}{2})^2})$$

$$= \begin{cases} 0 & d \le 0 \\ (\dfrac{d}{2a})^2 & 0 \le d \le 2a \\ 1 & d \ge 2a \end{cases} \quad \rightarrow \quad \boxed{f_D(d) = \frac{\partial F_D(d)}{\partial d} = \begin{cases} \dfrac{d}{2a^2} & 0 \le d \le 2a \\ 0 & Otherwise \end{cases}}$$

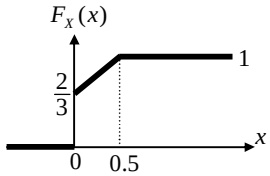
$$\boxed{m_D = E\{D\} = \int_0^d x f_D(x)\,dx = \left.\frac{x^3}{6a^2}\right|_{x=0}^{x=2a} = \frac{4}{3}a}$$

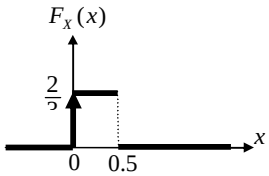
$$E\{D^2\} = \int_0^d x^2 f_D(x)\,dx = \left.\frac{x^4}{8a^2}\right|_{x=0}^{x=2a} = 2a^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{Var(D) = E\{D^2\} - E\{D\}^2 = \frac{2}{9}a^2}$$

۴- زمان انتظار را متغیر تصادفی X می‌گیریم.

$$\boxed{F_X(x) = \Pr(X \le x) = \Pr(G)\Pr(X \le x \mid G) + \Pr(R)\Pr(X \le x \mid R) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}x \qquad 0 \le x \le 0.5}$$

$$\boxed{f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \begin{cases} \dfrac{2}{3}d(x) + \dfrac{2}{3} & 0 \le x \le 0.5 \\ 0 & Otherwise \end{cases}}$$





تابع ضربه از ناپیوستگی تابع توزیع تجمعی در $x=0$ ناشی می‌شود.

$$\boxed{\Phi_X(w)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{jwx}f_X(x)dx=\frac{2}{3}\int_{-\infty}^{\infty}e^{jwx}d(x)dx+\frac{2}{3}\int_{0}^{0.5}e^{jwx}dx=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}e^{j\frac{w}{4}}\frac{\sin(w/4)}{w/4}}$$

$$\boxed{m_X=E\{X\}=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx=\frac{1}{12}\quad,\quad P_X=E\{X^2\}=\frac{1}{36}\quad,\quad s_X^2=\frac{1}{36}-(\frac{1}{12})^2=\frac{1}{48}}$$

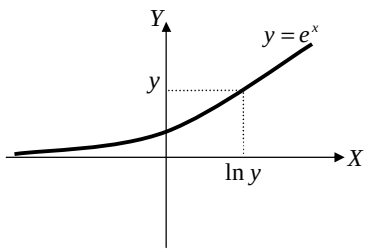
۵- الف)

$$X\sim N(m,s^2)\ \rightarrow\ \Phi_X(s)=e^{ms+\frac{1}{2}s^2s^2}$$

$$\boxed{m_Y=E\{Y\}=E\{e^X\}=\Phi_X(1)=e^{m+\frac{1}{2}s^2}}\quad,\quad P_Y=E\{Y^2\}=E\{e^{2X}\}=\Phi_X(2)=e^{2m+2s^2}$$

$$\boxed{s_Y^2=E\{Y^2\}-E\{Y\}^2=e^{2m+2s^2}(1-e^{-s^2})}$$

ب)



$$f_Y(y)=0\qquad y<0$$

$$y=e^x\ ,\ \ y'=e^x\ \ ,x=\ln y\qquad (y\geq 0)$$

$$f_Y(y)=\frac{f_X(\ln y)}{|y|}=\frac{1}{y\sqrt{2ps^2}}e^{-\frac{(\ln y-m)^2}{2s^2}}u(y)$$

۶- برای متغیر تصادفی Y داریم:

$$F_Y(y)=\Pr\{Y\leq y\}=\Pr\{F_X^{-1}(U)\leq y\}=\Pr\{U\leq F_X(y)\}=F_U(F_X(y))=F_X(y)$$

توجه کنید که $F_U(u)=\begin{cases}u & 0\leq u\leq 1\\ 0 & Otherwise\end{cases}$.

۷- اگر $P_A(n)$ تابع جرم احتمال تعداد تصادفات و $P_K(n)$ تابع جرم احتمال تعداد تصادفات منجر به فوت باشد:

$$P_A(n)=e^{-a}\frac{a^n}{n!}$$

$$P_K(n)=\sum_{m=0}^{\infty}P_A(m)\Pr\{\#havekilled=n\,|\#accident=m\}$$

$$\Pr\{\#havekilled=n\,|\#accident=m\}=\begin{cases}\binom{m}{n}p^n(1-p)^{m-n} & m\geq n\\ 0 & m<n\end{cases}\quad\rightarrow$$

$$P_K(n)=\sum_{m=n}^{\infty}e^{-a}\frac{a^m}{m!}\frac{m!}{n!(m-n)!}p^n(1-p)^{m-n}=\frac{e^{-a}}{n!}(ap)^n\sum_{m=n}^{\infty}\frac{[a(1-p)]^{m-n}}{(m-n)!}$$

$$=\frac{e^{-a}}{n!}(ap)^n\sum_{s=0}^{\infty}\frac{[a(1-p)]^s}{s!}=\frac{e^{-a}}{n!}(ap)^ne^{a-ap}=e^{-ap}\frac{(ap)^n}{n!}\qquad\boxed{P_K(n)=e^{-ap}\frac{(ap)^n}{n!}}$$

۸- از آنجایی‌که $|X|<0.5$، آن‌گاه: $\sum_{k=0}^{\infty}X^k=\frac{1}{1-X}$، در نتیجه:

$$\sum_{k=0}^{\infty}E\{X^k\}=E\{\sum_{k=0}^{\infty}X^k\}=E\{\frac{1}{1-X}\}$$

از طرفی: $f_X(x)=\begin{cases}1-x & |x|<0.5\\ 0 & Otherwise\end{cases}$. در نتیجه:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}E\{X^k\}=E\{\frac{1}{1-X}\}=\int_{-0.5}^{0.5}\frac{1}{1-x}(1-x)dx=1}$$

۹-

الف)

$$m_Y = E\{Y\} = E_X\{E\{Y \mid X\}\} = \Pr(X=1)E\{Y \mid X=1\} + \Pr(X=0)E\{Y \mid X=0\}$$
$$= qE\{|V|\} + (1-q)E\{-|V|\} = (2q-1)E\{|V|\}$$

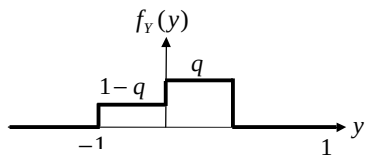
$$V \sim U(-1,1) \;\rightarrow\; |V| \sim U(0,1) \;\rightarrow\; E\{|V|\} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{m_Y = q - \frac{1}{2}}$$

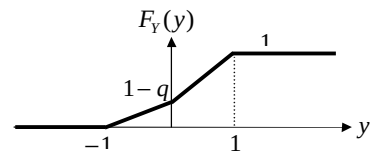
ب)

$$\boxed{\begin{array}{l} Y \mid X=0 \;=\; |V| \sim U(0,1) \\ Y \mid X=1 \;=\; -|V| \sim U(-1,0) \end{array}}$$

ج) با استفاده از قضیهٔ احتمال کلی:

$$f_Y(y) = \Pr(X=1)\, f_Y(y \mid X=1) + \Pr(X=0)\, f_Y(y \mid X=0) = q\, f_Y(y \mid X=1) + (1-q)\, f_Y(y \mid X=0)$$
$$F_Y(y) = \Pr(X=1) F_Y(y \mid X=1) + \Pr(X=0) F_Y(y \mid X=0) = q F_Y(y \mid X=1) + (1-q) F_Y(y \mid X=0)$$





۱۰- چون X و Y مستقل از هم‌اند: $f_{XY}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) = l^2 e^{-l(x+y)} u(x) u(y)$

متغیرهای X و Y مثبت‌اند، در نتیجه $F_Z(z) = 0 \quad z \le 0$ و $F_Z(z) = 1 \quad z \ge 1$. برای $0 < z < 1$:

$$F_Z(z) = \Pr\{Z \le z\} = \Pr\{\frac{X}{X+Y} \le z\} = \Pr\{X \le \frac{z}{1-z} Y\} = \int_0^\infty \int_0^{\frac{z}{1-z}y} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^\infty f_Y(y) \int_0^{\frac{z}{1-z}y} f_X(x)\,dx\,dy = \int_0^\infty l e^{-ly} \int_0^{\frac{z}{1-z}y} l e^{-lx}\,dx\,dy = \int_0^\infty l e^{-ly}(1 - e^{-l\frac{z}{1-z}y})\,dy$$

$$= \int_0^\infty l e^{-ly}\,dy - \int_0^\infty l e^{-l\frac{1}{1-z}y}\,dy = 1 - (1-z) = z \qquad \rightarrow \qquad F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ z & 0 < z < 1 \\ 1 & 1 \le z \end{cases}$$

در نتیجه:

$$\boxed{f_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ 1 & 0 < z < 1 \\ 0 & 1 \le z \end{cases} \;=\; U(0,1)}$$

۱۱- الف)

$$q = \mathrm{Arg}(X + jY) \quad , \quad R = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad \rightarrow \quad X = R\cos q \quad , \quad Y = R\sin q$$

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) = \frac{1}{2p s^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2s^2}}$$

$$f_{R,q}(r,q) = \frac{f_{XY}(r\cos q, r\sin q)}{|\det(J)|} \quad , \quad J = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r} \quad , \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{r}$$

$$q = \mathrm{Arg}(x+jy) = \begin{cases} Arc\tan(\frac{y}{x}) & x>0 \\ p + Arc\tan(\frac{y}{x}) & x<0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{-y/x^2}{1+(y/x)^2} = \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{-y}{r^2} \quad , \quad \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{1/x}{1+(y/x)^2} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x}{r^2}$$

$$\rightarrow \quad \det(J) = \frac{x^2}{r^3} + \frac{y^2}{r^3} = \frac{1}{r} \quad \rightarrow \quad \boxed{f_{Rq}(r,q) = \frac{r}{2ps^2} e^{-\frac{r^2}{2s^2}} u(r)}$$

$$\boxed{f_q(q) = \int_0^\infty f_{Rq}(r,q)\,dr = \frac{1}{2p}\int_0^\infty \frac{r}{s^2} e^{-\frac{r^2}{2s^2}} dr = \frac{1}{2p} \qquad (-\frac{p}{2} < q < \frac{3p}{2})}$$

$$\boxed{f_R(r) = \int_0^{2p} f_{Rq}(r,q)\,dq = \int_0^{2p} \frac{r}{2ps^2} e^{-\frac{r^2}{2s^2}} u(r)\,dq = \frac{r}{s^2} e^{-\frac{r^2}{2s^2}} u(r)}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، $f_{Rq}(r,q) = f_R(r) f_q(q)$ و در نتیجه R و q مستقل‌اند.

ب) با توجه به بخش الف و رابطهٔ یک به یک بین (R,q) و (X,Y)، اگر R و q مستقل از هم باشند و داشته باشیم:

$$q \sim U(-\frac{p}{2}, \frac{3p}{2}) \quad , \quad R \sim \frac{r}{s^2} e^{-\frac{r^2}{2s^2}} u(r)$$

در این‌صورت $X = R\cos q \;,\; Y = R\sin q$ مستقل از هم بوده و هر یک دارای توزیع نرمال هستند. در این حالت متغیر های تصادفی $R\sin 2q \;,\; R\cos 2q$ نیز مستقل از هم بوده و دارای توزیع نرمال هستند. همچنین $\frac{1}{2}R\sin 2q \;,\; R\cos 2q$ نیز مستقل از هم و دارای توزیع نرمال هستند؛ بنابراین U,V مستقل از هم و دارای توزیع نرمال هستند، زیرا:

$$U = \frac{X^2 - Y^2}{\sqrt{X^2+Y^2}} = \frac{R^2\cos 2q}{R} = R\cos 2q \quad , \quad V = \frac{XY}{\sqrt{X^2+Y^2}} = \frac{R^2 \sin 2q}{2R} = \frac{1}{2}R\sin 2q$$

-۱۲

$$f_{X_i}(x) = e^{-x}u(x) \quad \rightarrow \quad \Phi_{X_i}(s) = \frac{1}{1-s} \quad \rightarrow$$

$$\Phi_Y(s) = \prod_{i=1}^n \Phi_{X_i}(s) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1-s} = \frac{1}{(1-s)^n}$$

با توجه به نامساوی چرنف:

$$\Pr\{Y > 2n\} \le e^{-2ns}\Phi_Y(s) = \frac{e^{-2ns}}{(1-s)^n}$$

رابطهٔ فوق به ازای هر $s>0$ (شرط نامساوی چرنف) و $s<1$ (با توجه به ناحی‌ه همگرایی تابع مولد ممان که بای‌د در یک طرف محل قطب و شامل محور jw باشد) برقرار است. مقدار مینیمم $\frac{e^{-2ns}}{(1-s)^n}$ را در بازهٔ $0<s<1$ می‌یابیم.

$$\frac{d}{ds}(\frac{e^{-2ns}}{(1-s)^n}) = \frac{-2ne^{-2ns}}{(1-s)^n} + \frac{ne^{-2ns}}{(1-s)^{n+1}} = 0 \quad \rightarrow \quad s = \frac{1}{2} \quad \rightarrow P(Y > 2n) \le (\frac{2}{e})^n$$

-۱۳

$$\boxed{E\{Y\} = E_{X_1,X_2}\{E\{Y \mid X_1, X_2\}\} = E_{X_1,X_2}\{\frac{X_1+X_2}{2}\} = \frac{m}{2} + \frac{m}{2} = m}$$

$$E\{Y^2\}=E_{X_1,X_2}\{E\{Y^2\mid X_1,X_2\}\}=E_{X_1,X_2}\{\frac{(X_1-X_2)^2}{12}+(\frac{X_1+X_2}{2})^2\}=E_{X_1,X_2}\{\frac{X_1^2+X_2^2+X_1X_2}{3}\}$$
$$=\frac{1}{3}E\{X_1^2\}+\frac{1}{3}E\{X_2^2\}+\frac{1}{3}E\{X_1\}E\{X_2\}=\frac{1}{3}(s^2+m^2)+\frac{1}{3}(s^2+m^2)+\frac{1}{3}m^2=\frac{2}{3}s^2+m^2$$
$$\boxed{Var(Y)=E\{Y^2\}-E\{Y\}^2=\frac{2}{3}s^2}$$

۱۴- الف)
$$Cov(U,V)=E\{UV\}-E\{U\}E\{V\}=E\{(X-Y)(X+Y)\}-E\{X-Y\}E\{X+Y\}$$
$$=E\{X^2\}-E\{Y^2\}-0\times 0=s^2-s^2=0$$

چون دو متغیر تصادفی X و Y نرمال هستند، متغیرهای تصادفی U و V نیز نرمال هستند و چون ناهمبسته‌اند در نتیجه مستقل‌اند.

ب)
$$U=X-Y\ ,\ V=X+Y \quad \rightarrow$$
$$X^3-Y^3=(X-Y)(X^2+Y^2+XY)=(X-Y)((X+Y)^2-XY)=U[V^2-(\frac{V+U}{2})(\frac{V-U}{2})]$$
$$=U(V^2-\frac{1}{4}V^2+\frac{1}{4}U^2)=U(\frac{3}{4}V^2+\frac{1}{4}U^2) \quad \rightarrow$$
$$E\{X^3-Y^3\mid X-Y\}=E\{U(\frac{3}{4}V^2+\frac{1}{4}U^2)\mid U)=U\frac{3}{4}E\{V^2\mid U\}+\frac{1}{4}U^3=U\frac{3}{4}E\{V^2\}+\frac{1}{4}U^3$$
$$E\{V^2\}=E\{(X+Y)^2\}=E\{X^2\}+E\{Y^2\}+2E\{XY\}=s^2+s^2+2s^2r=2s^2(1+r) \quad \rightarrow$$
$$\boxed{E\{X^3-Y^3\mid X-Y\}=\frac{3}{2}s^2(1+r)(X-Y)+\frac{1}{4}(X-Y)^3}$$

۱۵-تعریف می‌کنیم: $M=\min(X,Y,Z)$. واقعهٔ A را کوچکتر بودن X از Y و Z تعریف می‌کنیم. به علت تقارن برای X، Y و Z، احتمال آن‌که هر یک از متغیرهای تصادفی از دوتای دیگر کوچکتر باشد، برابر با $\frac{1}{3}$ است:
$$\Pr(A)=1-\Pr(A')=\frac{1}{3}$$
$$E\{X\mid M\}=E\{X\mid M,A\}\Pr(A)+E\{X\mid M,A'\}\Pr(A')$$

اگر A آنگاه مقدار مینیمم همان X است و در نتیجه: $E\{X\mid M,A\}=M$

اگر A' آنگاه $M<X<2$ و توزیع آن یکنواخت است. در نتیجه: $E\{X\mid M,A'\}=\frac{2+M}{2}$
$$\boxed{E\{X\mid M\}=\frac{1}{3}M+\frac{2}{3}\times\frac{2+M}{2}=\frac{2}{3}M+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\min(X,Y,Z)+\frac{2}{3}}$$

-۱۶

۱) در بسط دترمینان بر حسب درایه‌های ماتریس $A_{n\times n}$ تعداد جملات $n!$ است که نصف آن‌ها با علامت منفی و نصف دیگر با علامت مثبت‌اند.

۲) هر یک از جملات در بسط دترمینان حاصل‌ضرب n درایهٔ متمایز از ماتریس است که هیچ زوجی از آن‌ها در یک سطر و یا یک ستون از ماتریس نیستند. همچنین حاصل‌ضرب هر مجموعه‌ای از n درایه که در یک سطر و یک ستون نباشند، یک جمله از بسط دترمینان است.

(اثبات بند ۱ با استقرا انجام‌پذیر است. اثبات بند ۲ بخش با استفاده از روش بسط دترمینان روی یک سطر (یا ستون) انجام می‌شود.)

بنابراین:

$$\det(A_{n\times n}) = \sum_{k=1}^{n!} s_k P_k \quad , \quad P_k = a_{i_{1k} j_{1k}} a_{i_{2k} j_{2k}} \ldots a_{i_{nk} j_{nk}} \quad , \quad s_k = \pm 1$$

در رابطهٔ فوق $s_k P_k$ یکی از جملات بسط دترمینان است. مجموعهٔ اندیس‌های $\{i_{1k} j_{1k}, \ldots, i_{nk} j_{nk}\}$ طوری انتخاب می‌شوند که هیچ دو درایه از یک سطر یا ستون نباشند.

$$E\{P_k\} = E\{a_{i_{1k} j_{1k}} a_{i_{2k} j_{2k}} \ldots a_{i_{nk} j_{nk}}\} = E\{a_{i_{1k} j_{1k}}\} E\{a_{i_{2k} j_{2k}}\} \ldots E\{a_{i_{nk} j_{nk}}\} = 0$$

$$E\{P_k^2\} = E\{a^2_{i_{1k} j_{1k}} a^2_{i_{2k} j_{2k}} \ldots a^2_{i_{nk} j_{nk}}\} = E\{a^2_{i_{1k} j_{1k}}\} E\{a^2_{i_{2k} j_{2k}}\} \ldots E\{a^2_{i_{nk} j_{nk}}\} = s^{2n}$$

$$m \neq k : E\{P_k P_m\} = E\{a_{i_{1k} j_{1k}} a_{i_{2k} j_{2k}} \ldots a_{i_{nk} j_{nk}} a_{i_{1m} j_{1m}} a_{i_{2m} j_{2m}} \ldots a_{i_{nm} j_{nm}}\}$$

حداقل یک درایه در P_k هست که در P_m نیست. فرض آن درایه $a_{i_{1k} j_{1k}}$ باشد:

$$E\{P_k P_m\} = \underbrace{E\{a_{i_{1k} j_{1k}}\}}_{=0} E\{a_{i_{2k} j_{2k}} \ldots a_{i_{nk} j_{nk}} a_{i_{1m} j_{1m}} a_{i_{2m} j_{2m}} \ldots a_{i_{nm} j_{nm}}\} = 0$$

$$\boxed{E\{\det(A_{n\times n})\} = E\{\sum_{k=1}^{n!} s_k P_k\} = \sum_{k=1}^{n!} s_k E\{P_k\} = 0}$$

$$Var\{\det(A_{n\times n})\} = E\{(\sum_{k=1}^{n!} s_k P_k)^2\} = E\{\sum_{k=1}^{n!} s_k^2 P_k^2 + \sum_{k=1}^{n!} \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq k}}^{n!} s_k s_m P_k P_m\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n!} E\{P_k^2\} + \sum_{k=1}^{n!} \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq k}}^{n!} s_k s_m \underbrace{E\{P_k P_m\}}_{=0} = \sum_{k=1}^{n!} E\{P_k^2\} = \sum_{k=1}^{n!} s^{2n} = n! s^{2n}$$

$$\boxed{Var\{\det(A_{n\times n})\} = n! s^{2n}}$$